16

DS MécaFlu 2

Exercice 1 Paramètres - Fluide : ρ, μ

- Écoulement : g hauteur d'eau

- Système : d, h

$\Rightarrow \exists f(V, \rho, \mu, g, d, h) = 0$ || On choisit les variables répétées ρ, g, h
- M, L, T représentés
- 1 param par "pôle"

6 param. 3 dimensions (M,L,T) ⇒ 3 nb adimentionnels.

$\Pi_1 = \rho^a g^b h^c V \quad [\Pi_1] = [-] \Leftrightarrow (kg^a\, m^{-3a}\, m^b s^{-2b}\, m^c)\, m.s^{-1} = [-]$

$(kg^a\, m^{-3a+b+c}\, s^{-2b})\, m.s^{-1} = [-]$

$\begin{cases} a = 0 \\ -3a+b+c+1 = 0 \\ -2b-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \;;\; b = -1/2 \;;\; -\frac{1}{2} + c + 1 = 0$

$\hookrightarrow c = -1/2$

$\hookrightarrow \boxed{\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gh}}}$

"Π_i classiques ?"

$\Pi_2 = \rho^a g^b h^c \mu \Rightarrow kg^a . m^{-3a+b+c} s^{-2b}\, kg . m^{-1} . s^{-1} = [-]$

$[Pa.s] = [N.m^{-2}.s] = [kg.m.s^{-2}.m^{-2}.1]$
$= [kg.m^{-1}.s^{-1}]$

$\begin{cases} a+1 = 0 \\ -3a+b+c-1 = 0 \\ -2b-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \;;\; b = -1/2 \;;\; 3 - 1/2 + c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -3/2$

$\boxed{\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho\sqrt{gh^3}}}$

2,5

$\Pi_3 = \rho^a g^b h^c d \Rightarrow kg^a\, m^{-3a+b+c}\, s^{-2b}\, m = [-]$

$\begin{cases} a = 0 \\ -3a+b+c+1 = 0 \\ -2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0,\; b = 0,\; c = -1$

$\boxed{\Pi_3 = d/h}$

Donc $\exists \phi \,/\, \phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$ ou $\exists \varphi \,/\, \boxed{V = \sqrt{gh}\, \varphi\left(\frac{\mu}{\rho\sqrt{gh^3}}, \frac{d}{h}\right)}$

1.2 Similitude complète indice m = maquette indice r = réel

- $\Pi_3 : \frac{d_m}{h_m} = \frac{d_r}{h_r}$ conservé par homotétie maquette/réel, quel que soit le rapport
- $\Pi_2 : \frac{\mu_m}{\rho_m\sqrt{g h_m^3}} = \frac{\mu_r}{\rho_r\sqrt{g h_r^3}} \xrightarrow[\rho_m = \rho_r]{\mu_m = \mu_r} h_r = h_m$ Ce n'est plus une maquette ... impossible

0,5

On fait changer de fluide : ρ et μ peuvent changer.

$$\frac{\mu_m}{\rho_m\sqrt{g h_m^3}} = \frac{\mu_r}{\rho_r\sqrt{g h_r^3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{h_m}^3}{\sqrt{h_r}^3} = \frac{\mu_m}{\mu_r}\frac{\rho_r}{\rho_m}$$

2

$$\sqrt{20^3} = \frac{\mu_m}{\mu_r}\frac{\rho_r}{\rho_m} \simeq 90$$

On veut $\frac{h_m}{h_r} < 1$ Donc il faut un liquide → plus dense
$= \frac{1}{20}$ et/ou → moins visqueux

(ce qui n'affecte pas Π_1

Par exemple du mercure. Mais un rapport de 90 me semble très difficile à atteindre.

1.3 Il faut absolument garder d/h. Sinon, le système ne se comporte pas du tout de la même façon : pour une même hauteur d'eau, on imagine bien que $d = h$ conduira à un résultat très différent de $d = \frac{1}{10} h$ ....

Pour connaître le résultat, il faut conserver Π_1

$$\frac{V_m}{\sqrt{g h_m}} = \frac{V_r}{\sqrt{g h_r}} \rightarrow \frac{Q_m/d_m^2}{\sqrt{h_m}} = \frac{Q_r/d_r^2}{\sqrt{h_r}} \Rightarrow Q_r = Q_m\left(\frac{d_r}{d_m}\right)^2\left(\frac{h_r}{h_m}\right)^{1/2}$$

2

Or $\frac{d}{h}$ est conservé : $\frac{d_m}{h_m} = \frac{d_r}{h_r} \Rightarrow \frac{d_m}{d_r} = \frac{h}{h} = k \Rightarrow Q_r = k^{\frac{5}{2}} Q_m$

[* Nb adim écarté : voir début page plus loin] $\hookrightarrow Q_r = 20^{5/2} Q_m$ $= 89 \, m^3/s$

1.4. Par le théorème de Toricelli (*) $v = \sqrt{2gh}$ si la trappe est "petite" vis à vis de la hauteur d'eau, de sorte que la vitesse puisse être considérée constante dans toute la trappe

(*) Car on est bien dans les hypothèses
* liquide stationnaire sauf en sortie
* action unique du poids
* fluide incompressible

QT

° c'est dans cet ordre de grandeur que le rapport d/h intervient

1

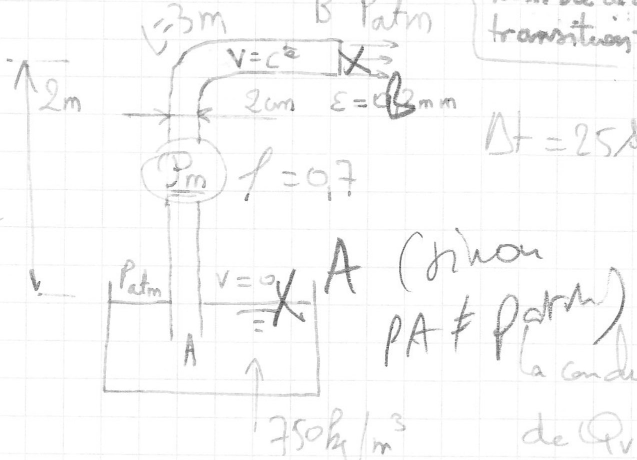
• Le 2^e nombre $\frac{\mu}{\rho\sqrt{gh^3}} = \frac{\mu}{\rho\sqrt{gh}\,h} = \frac{\mu}{\rho\frac{V}{\sqrt{2}}h} = \frac{1}{Re_{h\sqrt{2}}}$ doit caractériser l'écoulement le long de l'obstacle que constitue le barrage ? la fin de 1.3 montre qu'il ne doit avoir ~ aucune influence pour de l'eau, et pour Δh "grand".

Mais $\mu = 0$

On doit donc trouver $\varphi(\Pi_2, \Pi_3) \simeq \sqrt{2}$ pour | une "petite" trappe | les valeurs de μ, ρ, h "usuelles" d'un barrage fin 1.3 (2) $\frac{\Pi_{1m}}{\Pi_{1r}} = \sqrt{\frac{h_r^3}{h_m^3}} = \sqrt{20^3} = 90$ Mais $\Pi_{1r} = \frac{10^{-4}}{1000\sqrt{10}\sqrt{50}} \simeq 2.10^{-10}$ ← ex: 50m de haut

Même avec un rapport 100 entre les 2, les nombres "de Reynolds" (ou leur inverse) restent loin de la zone de transition ⇒ on aura le même type d'écoulement malgré tout. sens ql de Re ?

Exercice 2



$750 kg/m^3$

$\mu = 6.10^{-4}$ Pa.s

$\Delta t = 25s$ pour 50L $\Rightarrow Q_v = \frac{50.10^{-3}}{25}$

$Q_v = 2.10^{-3} m^3/s$

La conduite a un $\phi = c^{te}$. Par conservation de Q_v, $V = c^{te}$

Avec $Q_v = V.S \Rightarrow V = \frac{Q_v}{S} = \frac{2.10^{-3}}{\pi \frac{D^2}{4}}$

$V = \frac{2.10^{-3}}{\pi \frac{(2.10^{-2})^2}{4}} = 6,37 m/s$

Le th^{me} de Bernoulli Généralisé explicite que

|| Pour un fluide incompressible et parfait → μ "faible" donc hypothèse pas aberrante

C'est le cas de l'essence

NON ! $\mathcal{P}_{AB} \neq 0$

en écoulement permanent ; formant un filet de courant (car enfermé dans une conduite) et soumis au poids (force qui dérive d'1 potentiel)

hT

$$\frac{1}{2}\rho_A V_A^2 + p_A + \rho g z_A = \frac{1}{2}\rho_B V_B^2 + p_B + \rho g z_B + \frac{\mathcal{P}_{AB}}{Q_v} - \frac{\mathcal{P}_m}{Q_v}$$

NON avec $V_A = V_B$ (section constante)

$p_A = p_B = p_{atm}$

$\frac{\mathcal{P}_{AB}}{Q_v} = \Delta P_{AB}$ perte de charge

$\mathcal{P}_m$ = puissance de la pompe

$$\Rightarrow \mathcal{P}_m = Q_v \left[\Delta P_{AB} + \rho g \underbrace{(z_B - z_A)}^{H} \right]$$

$\Delta P_{AB} = \lambda \frac{L}{d} \frac{1}{2} \rho V^2$

On détermine λ. $\begin{cases} \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,2}{20} = 0,01 \\ Re_d = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{750.6,37.2.10^{-2}}{6.10^{-4}} = 1,6.10^5 \end{cases}$ (1)

Par lecture : $\lambda \simeq 0,038$

VV

⇒ mêmes résultats

D'où $\Delta P_{AB} = 0{,}038 \cdot \frac{3}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot 6{,}37^2 = \underline{0{,}867 \text{ bar}}$

Soit $P_m = 2 \cdot 10^{-3} \left[0{,}867 \cdot 10^5 + 750 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \right] = \underline{202{,}9 \text{ W}}$

Or : la pompe a un rendement $\rho = 0{,}7$

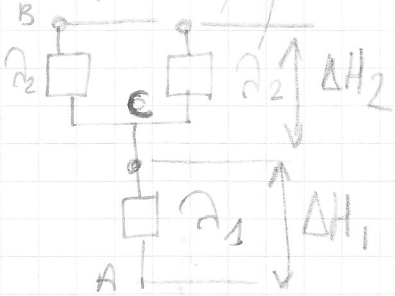
$\hookrightarrow P_{pompe} = \frac{202{,}9}{0{,}7} = \boxed{290 \text{ W}}$

9,5

2.2 Alors : dans la pompe, le débit est doublé (car le volume double, pour $\Delta t = c^{te}$) $\Longrightarrow Q_v = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

Un débit doublé dans une même section, donne une vitesse doublée 12,74 m/s

Pour les pertes de charge



parallèles

Dans les 2 branches, on a le même Q_v et la même V que dans l'autre configuration : λ n'a pas varié : $\lambda_2 = 0{,}038$

$\Longrightarrow \Delta P_{BC} = 0{,}038 \cdot \frac{2 \leftarrow \text{2m de longueur séparée}}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot 6{,}37^2 = 57\ 822 \text{ Pa}$

2

avec : ΔP_{BC} est le même dans les 2 branches, car elles débouchent à la même altitude

Dans la partie commune : on cherche λ_1. $\begin{cases} \varepsilon/D = 0{,}01 \\ Re_d = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{750 \cdot 12{,}74 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-4}} = 3{,}19 \cdot 10^5 \end{cases}$

λ est, par lecture toujours égal à 0,038

Soit $\Delta P_{AC} = 0{,}038 \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} \frac{1}{2} 750 \cdot 12{,}74^2 = \underline{115\ 644 \text{ Pa}}$.

Or $\Delta P_{AB} = \Delta P_{AC} + \Delta P_{CB} = \underline{1{,}735 \text{ bar}}$ (montage série)

Soit $P_m = 4 \cdot 10^{-3} \left[1{,}735 \cdot 10^5 + 750 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \right] = 752{,}9 \text{ W}$

Soit $P_{pompe} = \frac{752{,}9}{0{,}7} = \boxed{1{,}08 \text{ kW}}$

9,5

ROGRAMME : S6UP1 24/04/2009

SEIGNEMENT : Mécanique des fluides Promo 2011

... Analyse dimensionnelle – Pertes de charges

Consignes relatives au devoir: Durée : 2H30

Documents Autorisés : ☐ Oui ☑ Non Si oui, type de document :

Consignes spécifiques : Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Estimation du débit de vidange d'une retenue

L'écoulement d'eau au travers d'une vanne au pied d'un barrage est étudié en construisant une maquette à échelle 1/20ème. On s'intéresse à la vitesse V de vidange de la retenue au niveau la vanne, que l'on suppose de section carrée et caractérisée par son côté d. De cette vitesse, on pourra facilement déduire un débit de vidange.

$\propto$ Stric()

1.1. Déterminer les produits sans dimension susceptibles de décrire la vidange du réservoir.

1.2. Montrer que si le fluide utilisé sur la maquette est de l'eau, le respect de la similitude complète est impossible. Quelle solution peut-on alors imaginer pour respecter cette similitude complète ? Est-ce techniquement possible (justifier par un calcul) ?

1.3. Dans le cas d'une similitude partielle, quel nombre privilégiez-vous ? Dans ce cas, si le débit mesuré sur la maquette est de 0,5 m^3.s^{-1}, à quel débit doit-on alors s'attendre sur le prototype ? Quelles seront les conséquences du non respect de la similitude sur le nombre adimensionnel écarté ? Justifier numériquement.

1.4. Comment aurait-on pu obtenir un ordre de grandeur de ce débit de vidange sans passer par cette maquette ? Aurions-nous obtenu les mêmes résultats ?

Capillarité

$Q = V.S$

$V = Q/S$

Exercice 2 : Dimensionnement d'une pompe à carburant

Une pompe à essence de rendement $\rho = 0{,}7$ assure, en un temps $\Delta t = 25$ s, le remplissage d'un réservoir d'automobile d'une contenance V = 50 L. Elle aspire l'essence (de masse volumique $\rho = 750$ kg.m^{-3} et viscosité dynamique $\mu = 6.10^{-4}$ Pa.s) dans une immense citerne dont la surface libre est à la pression atmosphérique p_{atm}. Elle refoule l'essence sous forme d'un jet cylindrique, en contact avec l'atmosphère, se déversant dans le réservoir. La différence des cotes entre la section de sortie de la conduite et la surface libre de la citerne est H = 2 m. Le conduit a une longueur L = 3 m, un diamètre d = 2 cm et une rugosité $\varepsilon = 0{,}2$ mm.

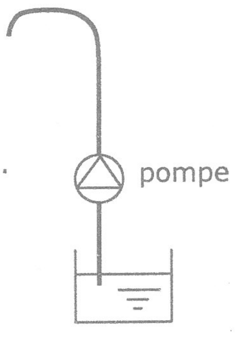
2.1. Calculer la puissance P consommée par la pompe pour créer ce débit (expliciter clairement la méthode). On négligera les pertes de charge singulières le long du conduit.

$2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2}$

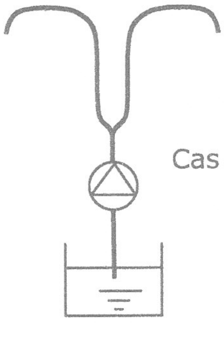
2.2. Que devient cette puissance si l'on remplit simultanément deux réservoirs identiques dans le même temps Δt et avec une seule pompe, la longueur de conduit commune valant L_c = 1 m [les longueurs après séparation sont identiques et valent ($L - L_c$) ; les diamètres restent égaux à d] ?

$\frac{\mu}{\rho \sqrt{gh}\, h}$

Cas 2.1.

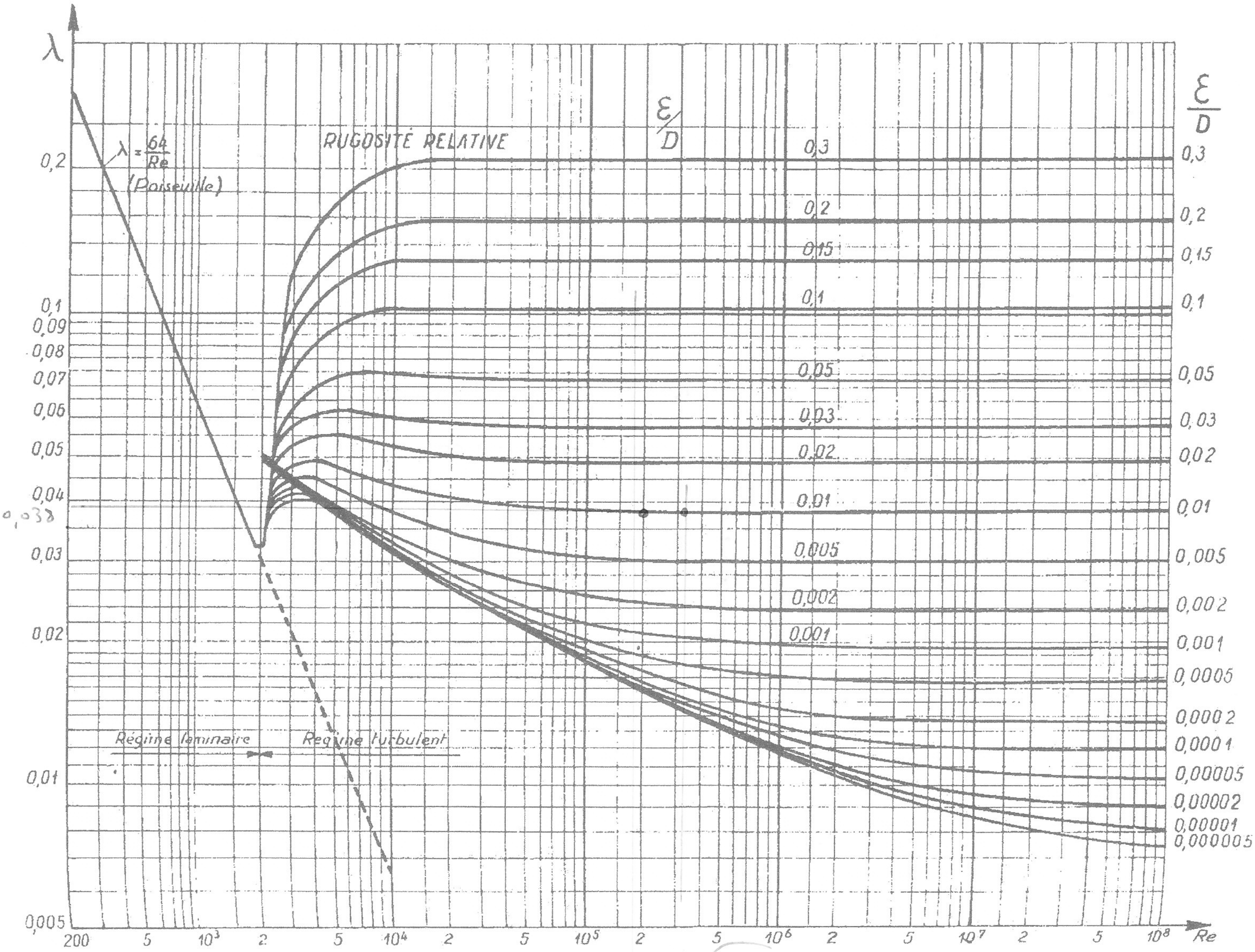


Cas 2.2.



$\frac{\mu}{\rho v h}$

Annexe : l'abaque de Moody



16.10^5